

Roll No.

Y – 284/ Y– 285 / Y– 286 (S)

B.A. (Second Year) EXAMINATION, (Suppl./Second Chance) Sept.-2021

MATHEMATICS

Paper – I, II, III

**ABSTRACT ALGEBRA/ADVANCED CALCULUS/DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

Time : Three Hours

Maximum Marks : 40 + 40 + 40 = 120 (For Regular Students)

Minimum Pass Marks : 33%

Maximum Marks : 50 + 50 + 50 = 150 (For Private Students)

Minimum Pass Marks : 33%

नोट- सभी प्रश्न हल कीजिये।

Attempt *all* questions.

खण्ड (अ)

Section A

1. (a) यदि H, K एक समूह G के दो उपसमूह हैं। तब HK, समूह G का एक उपसमूह होगा, यदि और केवल यदि $HK = KH$. 6½/8
If H, K are two subgroups of the group G, then HK will be a subgroup of G, if and only if, $HK = KH$.
- (b) चक्रीय समूह $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8 = e\}$ के जनक ज्ञात कीजिये। 6½/8
Find the generators of the cyclic group $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8 = e\}$.
2. (a) वाम सहसमुच्चय एवं दक्षिण सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिये। 6½/8½
सिद्ध कीजिये कि सहसमुच्चयों का उपसमूह होना आवश्यक नहीं है। उदाहरण दीजिये।
Define Left coset and Right coset.
Prove that A coset need not be a subgroup. Give an example.
- (b) किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ प्रसामान्य उपसमूह होता है। 6½/8½
The intersection of two normal subgroups of a group is a normal subgroup.
3. (a) यदि R वास्तविक संख्याओं का योगात्मक समूह है तथा R_+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का गुणनात्मक समूह हो तब दर्शाइये फलन 7/8½
$$\phi : R_+ \rightarrow R$$

जो $\phi(x) = \log_{10}x$ से परिभाषित है, एक समाकारिता है।

P.T.O.

If R be the additive group of real numbers and R_+ the multiplicative group of positive real numbers, prove that the mapping $\phi : R_+ \rightarrow R$ which is defined by

$$\phi(x) = \log_{10}x$$

is a homomorphism.

- (b) माना $f: G \rightarrow G'$, समूह G से समूह G' पर एक समाकारिता है तब f एकैक होगा यदि और केवल यदि $\text{Ker}f = \{e\}$. 7/8½

A homomorphism f of a group G into a group G' is a monomorphism iff $\text{Ker}f = \{e\}$.

खण्ड (ब)

Section B

4. दिखाओ कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है। 13/16
Show that every Cauchy sequence is bounded but the converse is not true.
5. फलन $f(x) = x^2 + 1$ तथा $\phi(x) = 2x^3$ के लिये सर्वत अंतराल $[1, 2]$ में कौशी के मध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिये। 13/17
Verify Cauchy's mean value theorem for the function $f(x) = x^2 + 1$ and $\phi(x) = 2x^3$ in the closed interval $[1, 2]$.
6. प्रतिस्थापन $x = y_x$ के द्वारा समीकरण 14/17

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ को}$$

रूपान्तरित कीजिये।

Transform the equation

by putting $x = y_x$.

खण्ड (स)

Section C

7. रेखिक अवकल समीकरण $4xy'' + 2y' + y = 0$ का श्रेणी हल ज्ञात कीजिये। 13/16
Find the series solution of the linear differential equation $4xy'' + 2y' + y = 0$.
8. निम्न फलन का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिये। 13/17

$$f(t) = t \cos^2 t$$

Find the Laplace transformation of the following function.

$$f(t) = t \cos^2 t$$

9. हल कीजिये— 14/17

$$(y + z)p + (z + x)q = x + y$$

Solve—

$$(y + z)p + (z + x)q = x + y$$